

# 論「精確線型理性預期模型計量方法」 應用之限制

李秀雲\*

在理性預期的假設之下，經濟模型往往需要將變數前瞻求解以達成體系之收斂，這當中包括部份經濟變數的實現值與其他經濟變數的預期值之間，存在著無誤差項動態關係的模型。Hansen and Sargent (1981) 廣為應用之精確線型理性預期模型計量分析，說明了如何針對前瞻解模型導出跨式限制以進行假說檢定。本文指出應用 Hansen and Sargent 的這套計量分析方法，不能在檢定模型引申推論的同時，也將理論上變數之自發或外生性質加諸在 VAR 模型之因果關係中；內生的前瞻解變數必須在統計上有助於外生變數之預測，才可以保證時間序列模型不會出現與定態性質相矛盾的參數估計結果。

關鍵詞：精確線型理性預期模型，前瞻解，因果關係  
JEL 分類代號：C32, C51, C52

## 1 前言

在理性預期的假設下，經濟模型求導出來的變數往往需要前瞻求解 (to solve forward) 以達成體系之收斂。這當中包括某些經濟變數的實現值與其他變數的條件預期值之間，存在著無誤差項關係式的線性模型，例如基本面的股價決定於未來所有股利之現值。Hansen and Sargent (1981) 稱之為「精確線型理性預期模型」(exact linear rational expectation model, 簡記為 ELRE 模型)。<sup>1</sup>

\*作者為中正大學經濟系副教授。本文承林向愷教授提供諸多寶貴意見，而霍德明教授、管中閔教授與多位匿名評審的指正，也使作者受益良多，本人深表感謝。

<sup>1</sup>其他熟悉的例子有 Friedman 的恆常所得假說 (消費決定於未來所得預期值)，Cagan 之通貨膨脹模型 (通貨膨脹率決定於未來的貨幣供給預期成長率)，Lucas 之資產定價模型 (資產價格決定於未來的紅利預期值)，Dornbusch 之匯率過度調整假說 (匯率決定於未來的貨幣供給預期值)；或是一些由極大化目標函數值出發的一般均衡模型，如新古典資本累積模型 (最適資本存量決定於未來所有的外生衝擊現值)。

這類文獻在經濟分析上饒富趣味，但要進行實證研究則先得克服二個難題：第一，變數之未來預期值是無法觀察的；第二，精確解表示本期變數實現值與未來變數預期值之間的關係式不存在誤差項。

Hansen and Sargent (1981) 針對上述無誤差項關係式的特性，提出一套分析 ELRE 模型的計量方法。因為他們的計量方法對變數預期值之處理較為簡單，又可以同時估計模型參數與檢定假說，確實解決了這類模型過去實證上的難題。Hansen and Sargent (1981, 1991) 的這套 ELRE 計量分析法，是建構在向量移動平均 (vector moving average, VMA) 模型之上，Campbell (1987) 與 Campbell and Shiller (1987) 則更進一步將 Hansen and Sargent 的概念應用於更普遍的向量自我迴歸 (vector autoregression, VAR) 模型。透過 VAR 模型易於求導期望值的特性，Campbell 將 ELRE 模型的推論巧妙地變成對個別迴歸式的迴歸係數限制，因此這套 ELRE 計量分析法在過去十多年已被普遍的應用著。本文所要強調的，也正是這種分析法的限制——如果實證時除了要被預期的外生變數本身，內生的前瞻解變數對外生變數之預測並無幫助，ELRE 計量方法就會出問題。這是因為理論隱含前瞻解變數決定於外生變數的預期值，當經濟個體只利用外生變數本身的落後值就足以獲得其最佳預測時，就等於理論隱含前瞻解變數完全決定於外生變數的當期與落後值，所以訊息集中真正有用的誤差項只需外生變數的預測誤差，VAR 模型中的變數個數少於誤差項的個數，<sup>2</sup> 以致於上述的 ELRE 計量方法會出錯。

以專門的術語來說：Hansen and Sargent 的這套 ELRE 計量分析法，必須假設模型中的變數都具有定態 (stationary) 性質，也就是當我們用一個時間數列模型來描述變數的走勢時，該模型 VAR 的特性根 (eigenvalues) 必須都是穩定的。但在前瞻求解的理論模型，經濟理論隱含之動態方程式中必定包含不穩定根。如果實證時除了要被預期的外生變數本身，內生的前瞻解變數對其未來值之預測並無幫助，透過 ELRE 計量方法就會在 VAR 部份還原出理論上的不穩定根。此因理論隱含前瞻解變數決定於外生變數的預期值，當訊息集中真正有用的誤差項只需外生變數的預測誤差，ELRE 計量方法使得誤差項不足的受限 VAR 模型產生錯誤根。因此應用 ELRE 計量方法除了要求變數之間滿足模型的引申推論，還得要求除了外生變數本身之外，尚有其他資訊有助於其未來值之預測 (反映在前瞻解變數對外生變數的預測能力

<sup>2</sup>VAR 模型中的變數個數等於前瞻解變數的個數加上外生變數的個數，而模型中誤差項的個數卻只和外生變數的個數一樣多。

上)。足夠的訊息才可約束變數滿足定態性質和阻止不穩定根的出現，實證時常用的定態條件不足以保證 ELRE 計量結果得到正確的特性根。應用該計量方法必須排除同時設定外生變數走勢獨立決定之模型，這就是應用 ELRE 計量方法需注意的限制。

接下來的第2小節就以 Sargent (1978) 的勞動需求模型為例，介紹 ELRE 模型的基本概念與應用狀況，然後在第3小節說明假定外生變數預期值獨立決定之前瞻解體系，與 ELRE 計量分析方法的衝突；當然這種衝突不獨存於勞動需求模型，而是存在於所有無誤差項的前瞻解體系。第4節則將 ELRE 計量方法和常用於現值模型實證的變異數上下限檢定 (variance bounds test) 做比較，最後一節為結論。

## 2 ELRE 計量分析之基本概念與應用 — 以 Sargent (1978) 勞動需求模型為例

Hansen and Sargent (1981) 首先提出處理無誤差項理性預期模型的計量方法。10年後，Hansen and Sargent (1991) 的《理性預期計量》(*Rational Expectations Econometrics*) 一書，重新收錄了這篇從未正式發表的文章。因為如何處理理性預期模型中看不見的預期變數，以驗證辛苦推導出的理論假說，早就是諸多經濟學者引頸期盼的，所以 Hansen 與 Sargent 的這套方法，在過去十多年已被普遍的應用在家計單位的消費選擇，小型開放體系的經常帳決定，政府跨期收支與資產訂價等課題上。

針對理性預期模型，Hansen and Sargent (1981) 說明沒有誤差項之 ELRE 模型在計量檢定上如何處理與估計：透過經濟理論的推導，我們可以得出體系內各變數之限制關係，譬如恆常所得假說隱含「今天的最適消費水準決定於未來所得之預期現值」，這條關係式就是理論假說的一個可檢定之引申推論 (testable implication)，通常我們就是根據這條式子來檢定假說是否成立。當該式變數的動態關係是一種無誤差項的關係時，Hansen and Sargent 即稱其為精確 (exact) 模型，例如剛才恆常所得假說的可檢定寓涵，我們只要知道未來所得之預期值，就可推知目前消費的精確值為何。另一方面，對於具有定態性質的變數，<sup>3</sup> 我們可以用一個定態的線型時間數列模型來表示相關變

<sup>3</sup>因為滿足定態性質之變數，才適用現有的漸近分配理論來做計量分析。Hansen and Sargent 針對定態變數的討論，是指可以適用於「經處理具有定態性質的」隨機變數。例如消費

數之隨機走勢；而知道了變數之時間走勢，透過線型的時間數列模型，理所當然地可以從訊息集中已有的本期與各落後變數，對變數未來值做最佳之預測，因此解決了預期變數觀察不到的問題。把這些條件預期值，代入理論模型隱含的關係式，我們就可以得到時間數列迴歸參數與理論模型結構參數之間的跨式限制 (cross-equations restrictions)，並估計滿足該限制式的模型參數。更進一步，透過受到參數跨式限制的模型和未受限的時間數列模型相比，由於前者包含於 (nested within) 後者之中，我們可以依據最大概似法來檢定理論假說。如果理論無法被拒絕，則這受限模型在資料的配適上，應與未受限的時間數列模型一樣好，反之受限模型與時間數列模型之差異太大，就表示實際資料拒絕該理論假說。簡言之，ELRE 計量方法不直接驗證模型之引申推論，而是透過由它導出的跨式限制，檢定受限的時間數列模型，如此也解決了原模型推論無誤差項的困擾。

在此借用 Hansen and Sargent (1981, 1991) 文中的一例 — Sargent (1978) 的勞動需求模型 — 來說明 ELRE 計量方法的應用。假設廠商唯一可以調整的生產要素是勞動力 ( $x_t$ )，而各期生產決定於：

$$f(x_t) = (f_0 + a_t)x_t - (f_1/2)x_t^2,$$

式中  $f_0, f_1 > 0, a_t$  為外生技術衝擊。假設僱用勞動的調整成本為  $(d/2)(x_t - x_{t-1})^2$ ,  $d > 0$ , 完全競爭市場之工資率為  $y_t$ , 則追求利潤現值極大廠商之目標函數為：

$$E_t \sum_{j=0}^{\infty} b^j \left[ (f_0 + a_{t+j} - y_{t+j})x_{t+j} - \frac{f_1}{2}x_{t+j}^2 - \frac{d}{2}(x_{t+j} - x_{t+j-1})^2 \right],$$

式中  $x_{t-1}$  與  $y_{t+j}, a_{t+j}$  對廠商而言均為已給定變數， $b$  則為介於零與一之間的折現因子， $E_t$  為在第  $t$  期訊息集合下之期望值符號。因為我們假設經濟個體為理性預期，所以個人主觀的預測值會與由相關模型推導的客觀數學期望值相等。最適規劃下的一階必要條件為：

$$E_{t+j}x_{t+j+1} + \vartheta x_{t+j} + (1/b)x_{t+j-1} = (bd)^{-1}(y_{t+j} - a_{t+j} - f_0), \forall j \geq 0,$$

和所得之間有共積關係 (cointegration)，則模型可以轉為討論儲蓄和所得差分這兩個定態變數間的限制 (Campbell 1987)。

式中  $\vartheta = -(f_1/bd + 1 + 1/b)$ 。終極條件 (transversality condition) 則為:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} b^T E_t x_{t+T} = 0.$$

代表模型必要條件的二階差分方程式包含兩個根:  $\lambda_1$  與  $\lambda_2$ , 且  $0 < \lambda_1 < 1$  而  $\lambda_2 > 1$ 。在滿足終極條件的要求下,  $x_t$  的解為:

$$x_t = \lambda_1 x_{t-1} - \left(\frac{\lambda_1}{d}\right) E_t \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_2}\right)^i (y_{t+i} - a_{t+i} - f_0). \quad (1)$$

追求利潤廠商的最適勞動需求,除了看原有的僱用量,還要預期所有未來之工資率與技術衝擊。然而這個理性預期模型並不符合前面定義之「精確」,因為在描述勞動需求與工資的動態關係中,已被加進了無法觀察的技術衝擊 ( $a_t$ )。Sargent (1978) 當時的作法是假設工資率與技術衝擊之隨機過程,然後根據該假設求得它們的期望值,代回勞動需求的前瞻解,以得出最適僱用量之決策規則 (decision rule)。除了假設  $a_t$  為 AR(1),在對工資率的設定方面,因為工資率對個別廠商來說都是外生給定的,另外也是為了簡化預期之求導,Sargent 先做了一個 Granger 的因果關係 (Granger-causality) 檢定,得證僱用量不是工資率變動之前因。因此他設定  $y_t$  遵循 AR( $n$ ),即工資率之預期可獨立於僱用量而決定,再將  $a_{t+j}$ ,  $y_{t+j}$  的預期求出以代入勞動需求,整理可得廠商的最適僱用量為落後各期之工資率與僱用量,加上一個誤差項 (為當期工資率預測誤差與技術衝擊預測誤差線性組合) 的函數。該式配合工資率之自迴歸式即構成一組受限的 VAR,可以透過最大概似法來估計。

很多的理性預期模型的前瞻解其實是沒有誤差項的,要是 (1) 式當中並無技術衝擊 ( $a_t = 0, \forall t$ ),我們就無法利用 Sargent (1978) 原來的計量方法。而 Hansen and Sargent (1981, 1991) 的 ELRE 計量方法正是針對這種精確的模型。設  $x_t$ ,  $y_t$  均已分別對其平均值取離差,則從理性預期模型導出之最適行為方程式是:

$$x_t = \lambda_1 x_{t-1} + \eta \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_2}\right)^i E_t y_{t+i}, \quad (2)$$

式中  $\eta$  為 (1) 式中的  $-\lambda_1/d$ 。對有相同形態差分方程的理性預期模型而言,如果我們已經知道  $|\lambda_1| < 1$  而  $|\lambda_2| > 1$ ,則將模型差分方程中的  $x_t$  前瞻求解成 (2) 的形式,是唯一可以滿足變數具有定態性質,不會發散的解法 (見

Blanchard 1979)。<sup>4</sup> 定態性質在計量分析是十分重要的, 它在 ELRE 計量方法中也是必要的前提。<sup>5</sup> 要是  $y_t$  為定態時間序列, 因為其在 (2) 式中對應之權數具絕對值可加性 (absolutely summable,  $\sum_{i=0}^{\infty} |\lambda_2^{-1}|^i < \infty$ ), 所以  $x_t$  亦為定態數列。ELRE 模型的處理方法如下: 由一般計量理論可知, 當  $x_t$  與  $y_t$  均為定態變數, 他們的 Wold 移動平均代表式 (Wold MA representation) 或稱基要移動平均代表式會存在。由於任何可逆轉 (invertible) 之  $q$  階向量移動平均, 均可以一向量自迴歸來表示, 假設存在一夠大的  $p$  值, 我們可以下列 VAR( $p$ ) 來逼近原基要移動平均式:<sup>6</sup>

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1(L) & \phi_2(L) \\ \psi_1(L) & \psi_2(L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

式中  $L$  為落後運算元,  $\phi_i(L) = \phi_{i1} + \phi_{i2}L + \dots + \phi_{ip}L^{p-1}$ ,  $\psi_i(L) = \psi_{i1} + \psi_{i2}L + \dots + \psi_{ip}L^{p-1}$ ,  $i = 1, 2$ ,  $u_{1t}$  和  $u_{2t}$  分別為跨期無關的隨機誤差項, 它的數学期望值為零, 共變異數矩陣為  $\Sigma_u$ 。定義

$$D(L) \equiv \begin{pmatrix} 1 - \phi_1(L)L & -\phi_2(L)L \\ -\psi_1(L)L & 1 - \psi_2(L)L \end{pmatrix}。$$

經過移項, (3) 式又可重新表為:

$$D(L) \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{pmatrix}。 \quad (4)$$

這裡  $x_t$  與  $y_t$  均為定態變數, 所以其特性方程式,  $D(Z)$ , 的根,<sup>7</sup> 都必須滿足倒數之絕對值小於一之限制, 也因此  $x_t$  與  $y_t$  都是可以還原回其移動平均

<sup>4</sup>理論上要獲得該前瞻解的輔助條件包括假設經濟體系能夠收斂, 理性個體的最適行為需滿足終極限制, 或滿足非 Ponzi 式的借貸 (no Ponzi game condition) 等。

<sup>5</sup>對於  $x_t$  與  $y_t$  均具單根的模型, 由於 (2) 式可以改寫成:

$$(1 - \lambda_2^{-1})(x_t - \lambda_1 x_{t-1}) - \eta y_t = \eta \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda_2)^{-i} E_t \Delta y_{t+i}。$$

令  $\hat{x}_t = x_t - \lambda_1 x_{t-1}$ , 上式表示若理論正確,  $\hat{x}_t$  與  $y_t$  應存有共積關係, 其線型組合  $s_t \equiv (1 - \lambda_2^{-1})\hat{x}_t - \eta y_t$  應為定態變數。所以 ELRE 計量分析可以轉為討論  $s_t$  與  $\Delta y_t$  這兩個定態變數的關係。

<sup>6</sup>Sargent (1978) 中,  $p = 4$ 。

<sup>7</sup> $D(Z) \equiv [1 - \phi_1(Z)Z][1 - \psi_2(Z)Z] - \phi_2(Z)\psi_1(Z)Z^2$ 。

代表式的, 亦即它們可以表示成當期與落後各期  $u_{1t}$  與  $u_{2t}$  的線型函數。<sup>8</sup> 要是時間數列模型包含倒數絕對值大於一的錯誤根, 則  $x_t$  與  $y_t$  就不能還原回當期與各落後期  $u_{1t}$  與  $u_{2t}$  之函數, 而且連有限值之二階動差 (finite second moment) 都不存在, 與「定態」之定義相違背。

由 (2) 式可知, 決策單位的訊息集合至少會包含  $x_t$  與  $y_t$  這兩個變數的當期與落後值, 這構成了他們訊息集合 ( $\Omega_t$ ) 中的一個子集合 (subset), 本文以  $F_t$  表示僅包含  $x_t$ 、 $y_t$  兩變數當期與落後值之訊息集合。計量分析者不知道  $\Omega_t$  為何並不要緊, 因為將 (2) 式投射 (project) 在  $F_t$  上, 模型之可檢定推論確實在時間序列模型中之迴歸係數形成限制。為簡化分析, 我以  $p = 2$  為例說明, 再將上式轉換成 VAR(1) 來處理, 令  $W_t \equiv (x_t \ x_{t-1} \ y_t \ y_{t-1})'$ ,  $U_t \equiv (u_{1t} \ 0 \ u_{2t} \ 0)'$ ,  $M$  為一  $4 \times 4$  的係數矩陣, 則 (3) 式也可以轉換為

$$W_t = MW_{t-1} + U_t, \quad (5)$$

這裡

$$M \equiv \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{21} & \phi_{22} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_{11} & \psi_{12} & \psi_{21} & \psi_{22} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

因為對所有  $i > 0$ ,  $E[U_{t+i}|F_t] = 0$ , 所以  $E[W_{t+i}|F_t] = M^i W_t$ , 令  $h \equiv (0 \ 0 \ 1 \ 0)$ , 則  $y_t = hW_t$ 。利用上述關係式又可導出

$$E[y_{t+i}|F_t] = hM^i W_t, \quad (6)$$

同理, 令  $f \equiv (1 \ 0 \ 0 \ 0)$ ,  $l \equiv (0 \ 1 \ 0 \ 0)$ , 經由 (5) 式與  $f$ 、 $l$  和  $h$  之定義, 將 (2) 式投射在  $F_t$  可得:

$$fW_t = \lambda_1 lW_t + \eta h \left[ I - \left( \frac{1}{\lambda_2} \right) M \right]^{-1} W_t, \quad (7)$$

本文定義  $I$  為  $4 \times 4$  之單位矩陣 (identity matrix), 此式對任何實現的  $W_t$  均應成立, 故我們可得到關於各係數之間的限制式為:<sup>9</sup>

$$f \left[ I - \left( \frac{1}{\lambda_2} \right) M \right] = \lambda_1 l \left[ I - \left( \frac{1}{\lambda_2} \right) M \right] + \eta h, \quad (8)$$

<sup>8</sup> 此亦為時間數列模型係數之認定條件 (Hannan, 1969, 1971)。

<sup>9</sup> 因為  $W_t$  為定態, 所以  $[I - M/\lambda_2]$  是可以逆轉的。

經過係數之比較,我們可得到下列跨式限制:  $\phi_{11} = \lambda_1 + \lambda_2$ ,  $\phi_{12} = -\lambda_1\lambda_2$ ,  $\phi_{21} = -\eta\lambda_2$ ,  $\phi_{22} = 0$ , 因此我們可以估計理論限制下的模型結構參數, 並且檢定假說。

在實際應用方面, 目前 ELRE 計量方法大多用於跨期消費選擇理論, 如 Campbell (1987) 與 Campbell and Deaton (1989), 他們的模型推論為: 經濟個體是因應預期未來所得減少而儲蓄。其次則是在政府收支方面, Hansen, Roberds and Sargent (1991) 與 Roberds (1991) 之模型推論為: 期初政府負債等於所有未來政府收支盈餘之現值; 而 Huang and Lin (1993) 的模型推論為: 最適稅率決定於未來政府赤字之現值。以及財務金融領域中之資產定價模型, 如 Campbell and Shiller (1987) 的現值模型隱含: 長短期利率差距決定於未來短期利率變動之現值, 與股價本益比等於未來股利下降的現值; 至於林向愷 (1991) 的理論隱含: 股票價格決定於理性投資者之預期紅利現值與一般投資者未來持股價值之預期現值。另外, Sheffrin and Woo (1990) 則將 ELRE 計量方法應用在小型開放經濟之經常帳動態, 他們的模型推論為: 開放體系之經常帳赤字反映所有未來淨產出變動現值之和。但可能因為該方法的不曾正式發表, 除了 Hansen and Sargent (1991) 書中收錄的文章, 多數作者們都只用其方法, 而未提及「精確線型理性預期計量」等名詞。

### 3 ELRE 計量方法與外生變數走勢之設定

在理性預期的假設下, 總體模型求導出來的內生變數, 往往具有前瞻求解的特徵。<sup>10</sup> 就變數的動態調整過程來說, ELRE 計量分析需假設模型中的變數具有定態性質, 當我們用一個時間數列模型來描述定態變數的走勢時, 該模型 VAR 矩陣的特性方程式, 具有解之倒數全部滿足絕對值小於一的特性。但在理性預期假設之下, 經濟理論隱含之特性根中, 往往包含絕對值大於一的不穩定根, 所以體系必須前瞻求解以免發散。由於計量檢定要求的「所有根均穩定」, 是定態變數的基本性質, 但同時經濟理論要求的「存在部份不穩定根」, 又是前瞻解體系的標準特徵, 如果實證時設定經濟理論上的外生變數也在統計上為外生 (依 Granger 定義之外生),<sup>11</sup> 用 ELRE 計量方法估計出來的

<sup>10</sup> 當我們利用聯立差分方程組來代表體系內生變數之動態調整過程時, 如果體系中非期初給定的變數的個數, 恰與該特性方程式絕對值大於一的特性根個數相同, 我們才可以得到唯一一條收斂解。在這種特性根之下, 變數必須前瞻求解 (詳見 Blanchard and Kahn 1980)。

<sup>11</sup> 指在 VAR 模型中, 落後的  $x_t$  對  $y_t$  之迴歸係數為零。



受限時間數列模型就會包含原不穩定根。ELRE 計量分析方法之正確性直接由對外生變數走勢的設定決定。

Sargent 在其勞動需求一文中，因為工資對個別廠商來講是外生的，所以他透過因果關係檢定出工資為統計上的外生。假設其遵循自我迴歸的過程如下：

$$y_t = \rho y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (9)$$

當廠商對工資之理性預期是根據上式，表示預期工資之決定與勞動需求無關，前瞻解變數不是外生變數之前因。對照第 (3) 式，本例  $y_t$  之走勢不受過去  $x_t$  實現值所影響，所以恰是該式  $\psi_1(L)$  等於零的特例。經由上一節的分析可知，滿足跨式限制下之第 (4) 式  $D(Z)$  的行列式分解為： $[1 - \rho Z][1 - (\lambda_1 + \lambda_2)Z + \lambda_1 \lambda_2 Z^2]$ ，原來影響勞動需求之不穩定根， $\lambda_2$ ，再度出現於描述該定態變數走勢之 VAR 矩陣， $Z^{-1}$  有絕對值大於一的錯誤解， $[1 - (M/\lambda_2)]$  原來竟無法逆轉。追根究底，因為實證時將工資設定為統計上之 Granger 外生，而定態的變數可以用移動平均式代表，也就是工資為其自身各期落後預測誤差的函數，由這些預測誤差可以得到未來工資的最佳預測。另一方面透過模型推論可知，需要前瞻求解的勞動需求決定於預期未來工資，因此同樣是工資各期之落後預測誤差的函數，雙變數的 VAR 模型只剩下一個預測誤差，所以應用 ELRE 計量方法會使受限的時間序列模型出現錯誤根。<sup>12</sup>

其實不只是 Sargent (1978) 的勞動需求模型，只要是假設在精確型前瞻解體系中的外生變數，如生產面衝擊、政府政策或外國變數等，為自我迴歸的形態，都不能用 ELRE 計量方法分析。而目前已發表利用該計量方法的文獻，無論是分析家計單位、政府部門、小型經濟或者資產價格，都是屬於部份均衡分析或個體選擇問題的探討。至於整個經濟體系如何運作或均衡解需滿足何種條件，則不在理論解釋的範圍之內。由於只強調內外生變數間的動態關係要滿足理論模型的推論，並未特別去設定預期變數之走勢，所以計量分析者在進行實證時，一方面對變數動態限制較鬆，一方面也不用擔心時間數列模型會有錯誤根。以 (2) 式的例子來說， $x_t$  受自身落後值與預期  $y_t$  現值之影響，但  $y_t$  走勢為何則不在理論討論之內，因此時間數列模型，(3) 式的特性方程式一般不會解出錯誤根。

<sup>12</sup>Sargent (1978) 原文當中另外還有生產衝擊的誤差項，故理論推論非精確型的。他假設工資走勢為自我迴歸，則 VAR 模型仍是有兩種預測誤差，不會有錯誤根的問題。

Hansen and Sargent (1981, 1991) 討論的是理性預期模型, 到底在理性預期的假設之下該如何對待外生變數之預期呢? McCallum (1989, p.146) 說理性預期是: 經濟個體的主觀預期與同樣訊息下變數之客觀條件機率分配期望值相同。由於不知實際的機率分配從何而來, 計量分析者假設該機率來自實際經濟社會, 也就是透過一個可反映實際社會的理論模型來產生上述機率分配。這就是呼應 Muth (1961) 最早定義的理性預期:「跟經濟理論一致的預期」, 所以外生變數之預期又回到理論模型的設定上來。如果統計上前瞻變數與外生變數互為因果, 則和一般理論模型設定自發性外生變數的期望值只受自身落後值影響, 必然產生不同的條件期望值, 這顯然不是理性的預期。如果是理性的預期, 且已經假設模型中自發性變數期望值只受自身落後值的影響, 這個理論模型的估計與檢定也應包括因果關係的限制——內生的前瞻解變數不為外生變數之前因, 這種情況不適用 ELRE 計量方法。

其實經濟理論上的外生變數並不必然是統計上的 Granger 外生, 如果實證時並不需要解出內生變數的決策規則, 似乎也不必要假設外生變數之預期獨立於內生變數而決定。內生變數有助於外生變數的預測, 可能是經濟個體在預測外生變數之走勢時, 訊息集中還有外生變數本身落後值以外的有用資訊, 該資訊反映在前瞻解變數上, 使得我們觀察到統計上前瞻解變數(經濟理論中的內生變數)為預期變數(經濟理論中的外生變數)變動的前因。<sup>13</sup> 假設內外生變數統計上互為因果, 對於強調內生變數會因為外生變數預期值變動而改變的前瞻解模型, 亦不失為一種合理的設定。<sup>14</sup> 畢竟政府態度的宣示、報章雜誌所披露的國際經濟動向乃至於特定市場之內線消息等, 讓經濟個體不必完全根據過去外生變數的實現值來推測未來。考慮其他的訊息反映在內生變數變動上, 應可以放心的使用 ELRE 計量方法。

#### 4 現值模型與變異數上下限檢定

財務金融領域中之現值模型, 因為具有報酬率或價格變數必須前瞻求解的特徵, 所以也多屬於精確線型理性預期模型的範圍。而過去許多分析現值模型的研究, 都是利用「變異數上下限檢定」的方法檢定其理論假說(如 Shiller 1979, Singleton 1980, LeRoy and Porter 1981 等)。該方法是針對不同大小

<sup>13</sup> 見 Campbell and Shiller (1988) 之說明。

<sup>14</sup> Campbell (1987) 未討論如何理性地預測未來變數, 但指出前瞻解變數在統計上一定要是預期變數之前因, 才能利用 ELRE 計量方法分析。

之訊息集合，利用預測誤差的性質，導出前瞻變數相關變異數的大小關係，再比較從樣本得出之變異數是否一致來檢定理論假說。由於這種方法只考慮理論假說對變異數大小的限制，未考慮它對相關變數時間數列模型迴歸係數的限制，所以檢定力不高。也正因為變異數上下限檢定只考慮部份必要條件，當資料不支持該檢定結果，代表理論假說遭到拒絕；但若資料無法拒絕該檢定，那並不表示理論假說在更嚴謹的檢定之下，依然可以成立。

例如從現值模型導出之方程式是：

$$x_t = \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i E_t[y_{t+i} | \Omega_t], \quad 0 < \beta < 1,$$

另外定義：

$$x_t^* = \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i y_{t+i}, \quad \text{與} \quad \hat{x}_t = \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i E_t[y_{t+i} | M_t],$$

式中  $\Omega_t$  與  $M_t$  分別表示經濟個體完整的訊息集合與僅包含  $y$  變數現在與落後值的訊息集合。令  $y_{t+i,t}^e = E_t[y_{t+i} | \Omega_t]$ ,  $\hat{y}_{t+i,t} = E_t[y_{t+i} | M_t]$ ,  $\delta_t = \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i (y_{t+i} - y_{t+i,t}^e)$ ,  $\xi_t = \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i (y_{t+i} - \hat{y}_{t+i,t})$ , 則  $\text{var}(x_t^*) = \text{var}(x_t) + \text{var}(\delta_t)$ ,  $\text{var}(x_t^*) = \text{var}(\hat{x}_t) + \text{var}(\xi_t)$ 。因為  $\text{var}(\delta_t) > 0$ , 且訊息集合越完整預測誤差不可能越大, 即  $\text{var}(\xi_t) \geq \text{var}(\delta_t)$ , 所以無論  $x_t$  與  $y_t$  之因果關係如何, 下列關係式必然存在：

$$\text{var}(x_t^*) > \text{var}(x_t) \geq \text{var}(\hat{x}_t)。$$

雖然理論上有上述關係,  $x_t^*$  和  $\hat{x}_t$  卻是觀察不到的變數。然而由定義可導出以下透過落後運元表示的關係式 (Singleton 1980):

$$\begin{pmatrix} x_t^* \\ x_t \\ \hat{x}_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(L^{-1}) & 0 \\ 0 & 1 \\ B(L) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_t \\ x_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(L^{-1}) & 0 \\ 0 & 1 \\ B(L) & 0 \end{pmatrix} C(L)U_t \equiv D(L)U_t,$$

當  $x_t$  與  $y_t$  為定態時,  $U_t$  為純噪音, 其特性方程式  $C(Z)$  的特性根絕對值都小於一, 因此多項式  $D(L)$  之權數具有雙向平方可加性 ( $\sum_{s=-\infty}^{\infty} D_s^2 < \infty$ )。以上條件可以保證  $x_t^*$ ,  $x_t$  與  $\hat{x}_t$  樣本變異數為其對應之母體變異數的一致性估計式。實證時,  $x_t$  的變異數可直接以樣本變異數替代, 而儘管  $x_t^*$  與  $\hat{x}_t$  都

觀察不到,其變異數也只是參數  $\beta$  與  $y_t$  代表式之函數。所以只要有  $x_t$  與  $y_t$  雙變數的時間數列模型並給定  $\beta$  值,就可以計算  $x_t^*$  與  $\hat{x}_t$  的變異數。

由於這種檢定現值模型的方法,只考慮理論假說對相關變數變異數大小之限制,未考慮它對  $x_t$  與  $y_t$  時間過程之限制,譬如這兩個變數時間數列模型迴歸係數的限制,所以檢定力不高。也正因為變異數上下限檢定只考慮部份必要條件,當資料不支持該檢定結果,代表理論假說遭到拒絕;但若資料無法拒絕該檢定,那並不表示理論假說在更嚴謹的檢定之下,依然可以成立。<sup>15</sup> 然而如果該檢定在估計  $x_t$  與  $y_t$  的雙變數時間數列模型時,加上理性預期的參數限制和  $y_t$  為 Granger 外生之假設,而且理論模型討論的是具有前瞻解之體系,則  $x_t$  與  $y_t$  雙變數時間數列模型會出現絕對值大於一的特性根,  $x_t$  的母體變異數趨近於無窮大,  $D(L)$  之權數也不再具有平方可加性,我們不能用有限的樣本變異數來估計無窮的母體變異數,自然上下限檢定之大小關係亦不復成立。總而言之,針對現值模型,變異數上下限檢定在估計  $x_t$  與  $y_t$  的時間數列模型時,若加上理性預期的參數限制和  $y_t$  為 Granger 外生之假設,則變異數大小關係其實是不存在的;但若忽略理論加諸於時間數列模型的限制,變異數上下限檢定註定是一種檢定力較差的實證方式。

## 5 結論

在理性預期的假設下,當我們透過一個前瞻解體系來分析經濟行為,如果實證時假設外生變數的期望值全由其自身落後值決定,則應用 ELRE 計量方法就會導致代表體系定態變數的時間數列模型出現違反定態性質之不穩定根。目前精確線型理性預期計量都應用在部份均衡或經濟個體課題之探討,這些文獻未出現不穩定根的問題,是因它們先在理論上推導出前瞻解變數為外生變數預期現值之函數,接著又在時間數列模型中設定這兩類變數互為因果。這樣設定的可能解釋為:經濟個體視為既定外生之變數,實際上還是體系中的內生變數,譬如個人視競爭市場中的價格變數為外生;或者經濟個體在預測外生變數之走勢時,訊息集中還有外生變數本身落後值以外的有用資訊,該資訊反映在前瞻解變數上,使得統計上內生的前瞻解變數成為外生變數變動的前因。不過,不能應用於一般假設外生變數遵循自我迴歸之前瞻解模型,實為應用 ELRE 計量方法者特別要注意的限制。

<sup>15</sup>Geweke (1980) 也有這方面的類似批評,他證明可以通過變異數上下限檢定的參數範圍較大,其中只有部份參數滿足更嚴格的迴歸檢定。

以 Sargent (1978) 估計的勞動需求為例, 假如沒有額外的技術衝擊, 而且應用 ELRE 計量方法仍維持 Sargent 原文「僱用量不是工資率變動前因」的假設, 因為實證時將理論上的外生變數設定為統計上之 Granger 外生, 定態的外生變數可以轉換成其自身各期落後預測誤差的函數, 而透過理論模型可知要前瞻求解的僱用量完全決定於當期和落後的工資, 因此也是工資各期落後預測誤差的函數, 雙變數的 VAR 模型其實只有一個預測誤差, 所以時間序列模型會還原理論模型中的不穩定根。<sup>16</sup> 唯有考慮經濟個體有較多的有用訊息, 允許統計上內外生變數間因果關係的存在, 由於定態的預期變數不可能是非定態變數的後果, 藉由夠多的訊息排除不穩定根的出現, 這時的模型才可以利用 ELRE 計量方法進行實證分析。事實上, 不只是 Sargent (1978) 的動態要素需求模型, 在 Hansen and Sargent (1991) 文中所聲稱適用 ELRE 計量的例子, 如 LeRoy and Porter (1981) 的現值模型, 應用 ELRE 計量方法也會有錯誤根的產生。因為 LeRoy and Porter (1981) 指明預期變數的機率分配是外生的, 它是一個自變數, 而前瞻解變數則是因變數 (dependent variable), 該模型和 Sargent (1978) 假設前瞻解變數不是預期變數前因的例子一樣, 應用 ELRE 計量方法一定會得出不穩定根。

總而言之, 具有前瞻求解特徵的精確型理性預期模型, 只要同時假設外生變數之預期獨立於前瞻變數而決定, 其 VAR 模型就會包含不穩定根, ELRE 計量方法必須限制不能應用在這類前瞻求解的體系。因此, 本文強調 ELRE 計量分析方法在實際應用上, 並非如 Hansen and Sargent (1981, 1991) 所言, 只要符合「精確」、「線型」與「理性預期」即可, 還需有前瞻解變數是預期變數之變動前因的因果關係存在才行。

## 參考文獻

- 林向愷 (1991), 投資人異質性與股價的決定: 台灣的實證分析, 《經濟論文叢刊》, 19:4, 383-411。
- Blanchard, Olivier J. (1979), Backward and forward solutions for economies with rational expectations, *American Economic Review*, 69, 114-118.
- Blanchard, O.J. and C.M. Kahn (1980), The solution of linear difference models under rational expectation, *Econometrica*, 48, 1305-11.

<sup>16</sup>若採用 ELRE 計量方法, 並且參數之估計結果與原文相同, 則 Sargent (1978) 時間序列模型隱含之不穩定根為 1.129。

- Campbell, John Y. (1987), Does saving anticipate declining labor income? An alternative test of permanent income hypothesis, *Econometrica*, 55, 1249–1273.
- Campbell, J.Y. and A. Deaton (1989), Why is consumption so smooth? *Review of Economics Studies*, 56, 357–74.
- Campbell, J.Y. and R.J. Shiller (1987), Cointegration and tests of present value models, *Journal of Political Economy*, 95, 1062–88.
- Campbell, J.Y. and R.J. Shiller (1988), Interpreting cointegrated models, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 12, 505–22.
- Geweke, John (1980), A note on the testable implications of expectations models, manuscript.
- Hannan, E.J. (1969), The identification of vector mixed autoregressive-moving average systems, *Biometrika*, 56, 223–5.
- Hannan, E.J. (1971), The identification problem for multiple equation systems with moving average errors, *Econometrica*, 39, 751–65.
- Hansen, L.P., W. Roberds and T.J. Sargent (1991), Time series implications of present value budget balance and of martingale models of consumption and taxes, in Hansen and Sargent eds, *Rational Expectations Econometrics*, 121–161, Westview Press.
- Hansen, L.P. and T.J. Sargent (1981), Exact linear rational expectations models: specification and estimation, *Federal Reserve Bank of Minneapolis Research Department Staff Report 71*.
- Hansen, L.P. and T.J. Sargent (1991), *Rational Expectations Econometrics*, Westview Press.
- Huang, C.H. and K.S. Lin (1993), Deficits, government expenditures and tax smoothing in the United States: 1929–1988, *Journal of Monetary Economics*, 31, 317–39.
- King, R.G., C.I. Plosser and S.T. Rebelo (1988), Production, growth and business cycles: I. the basic neoclassical model, *Journal of Monetary Economics*, 21, 195–232.
- LeRoy, S.F. and R. Porter (1981), The present value relation: tests based on implied variance bounds, *Econometrica*, 49, 555–74.
- Lucas, Robert E. Jr. (1978), Asset prices in an exchange economy, *Econometrica*, 46, 1429–45.
- McCallum, Bennett T. (1989), *Monetary Economics: Theory and Policy*, Macmillan Publishing Company.
- Muth, John F. (1961), Rational expectations and theory of price movements,

*Econometrica*, 29, 315–35.

Roberds, William (1991), Implications of expected present value budget balance: application to postwar U.S. data, in Hansen and Sargent eds, *Rational Expectations Econometrics*, 163–175, Westview Press.

Sargent, Thomas J. (1978), Estimation of dynamic labor demand schedules under rational expectations, *Journal of Political Economy*, 86, 1009–44.

Sheffrin, S.M. and W.T. Woo (1990), Present value tests of an intertemporal model of the current account, *Journal of International Economics*, 29, 237–53.

Shiller, Robert J. (1979), The volatility of long-term interest rates and expectations models of the term structure, *Journal of Political Economy*, 87, 1190–1219.

Singleton, Kenneth J. (1980), Expectations models of the term structure and implied variance bounds, *Journal of Political Economy*, 88, 1159–76.

#### Limitations of Econometric Analysis in Exact Linear Rational Expectations Models

Hsiu-Yun Lee

*Department of Economics, National Chung Cheng University*

Many rational expectations models have forward-looking solution. This includes models in which there is an exact linear relationship between the expected future values of exogenous variables and the current and past values of endogenous ones. Hansen and Sargent (1981) called such kind of models *exact linear rational expectations models* (ELRE). They derived the time series model's cross-equation restrictions and proposed a method to specify and estimate ELRE. However, the ELRE econometric analysis cannot be applied to models which assume that exogenous variables follow an AR process. More specifically, when using the ELRE econometric analysis, one must have the Granger causality from endogenous variables to variables which are exogenous in a structural model to get the correct eigenvalues in the corresponding restricted time series model.

Keywords: exact linear rational expectation model, forward solution,  
Granger causality

JEL classification: C32, C51, C52